Easy Climb

Alapötlet

Jelöljük $f_i(h)$-val, hogy minimálisan mennyi követ kell megmozgatni ahhoz, hogy az i-edik oszlop h magasságú legyen úgy, hogy elsőtől az i-edik oszlopig vezessen is egy legális[1] útvonal. Az i-től jobbra lévő oszlopokkal egyelőre tehát nem foglalkozunk. Ha egy h magasság nem megoldható (mert $|h - h_1| > (i-1) \cdot d$), ott ne legyen értelmezve a függvény. Definíció szerint f_1 kizárólag a h_1 pontban értelmezett, itt értéke 0 (hiszen az első oszlop nem átépíthető).

Tegyül fel, hogy az f_i költségfüggvényt már valahogy „kiszámoltuk", vizsgáljuk meg, hogyan tudunk ennek ismeretében előrelépni, és f_{i+1}-et megkapni. Természetesen adódik, hogy ez a költségfüggvény két részből épül fel: egyrészt az $i+1$. oszlop átépítésének költségéből, amely egyszerűen az új és eredeti magasságának különbsége: $|h - h_{i+1}|$, másrészt pedig az $1, \ldots, i$ oszlopokon egy olyan legális útvonal kialakításának költségéből, hogy az i. oszlop olyan magasságú, hogy át lehet róla lépni az $(i+1)$.-re (tehát i magassága $h-d$ és $h+d$ között van). Ez utóbbi tagot jelöljük g_{i+1}-gyel, ekkor:

$$g_{i+1}(h) = \min_{h'=h-d}^{h+d} f_i(h'),$$

ahol a minimumképzést tehát a $[h-d, h+d]$ tartományra kell elvégezni. Így a teljes költség:

$$f_{i+1}(h) = |h - h_{i+1}| + \min_{h'=h-d}^{h+d} f_i(h').$$

Az f_i függvények vizsgálatával a következő fontos megállapításokat tehetjük:

1. Lemma. *Két folytonos, egyenes szakaszokból felépülő[2], konvex $f(x)$ és $g(x)$ függvények $(f+g)(x)$ összege is ilyen.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy értelmezési tartományaik metszete nem üres, ellenkező esetben nincs miről beszélni. Ekkor szükítsük mindkét függvény értelmezési tartományát a metszetre. Világos, hogy továbbra is a fent nevezett tulajdonságúak maradtak. Ezzel visszavezettük a problémát az azonos értelmezési tartomány esetére.

Az világos, hogy az összeg is folytonos lesz, illetve egyenes szakaszokból épül fel. Bizonyítandó még a konvexitás (általában is igaz, hogy konvex függvények összege konvex, ezt most nem használjuk fel).

Vegyünk tehát most fel f minden töréspontjához tartozó x helyhez g-ben is, ha nem volt, egy képzeletbeli töréspontot, és viszont. Ekkor a konvexitási tulajdonság ekvivalens azzal, hogy az egyenes szakaszok meredeksége egy monoton növekvő sorozatot alkot. Az összeg szakaszainak meredeksége rendre f és g megfelelő szakaszainak meredekségeinek összegével egyezik meg, így szintén monoton nő (rendre egyre nagyobb (vagy egyenlő) számokat adunk össze), tehát $f+g$ is konvex. (Akinek ezt nehezére esik elhinni, rajzoljon néhány V-állású abszolútértéket, és összegezze.) □

1. Tétel. *Minden $i = 1, \ldots, n$ esetén f_i egy – értelmezési tartományán – folytonos, egyenes szakaszokból felépülő,* konvex *függvény.*

Bizonyítás. Teljes indukcióval: f_1-re definíciója miatt igaz az állítás. Tegyük fel, hogy f_i-re már beláttuk, hogy az állítás igaz, megmutatjuk, hogy f_{i+1}-re is igaz. Utóbbi két tag összegéből adódik:

[1] Az egymás utáni oszlopok magassága legfeljebb d-vel tér el.

[2] Értsd: töröttvonal.

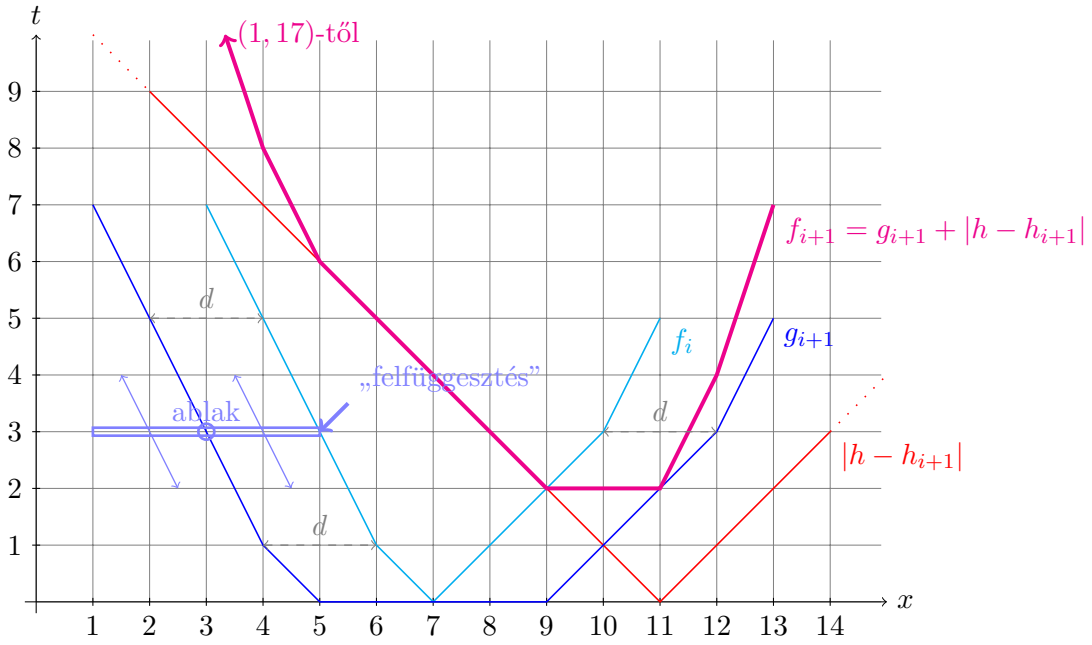
az abszolút értékre nyilván igaz a tétel állítása, így a fenti lemma miatt elegendő megmutatni, hogy $g_{i+1}(h)$-ra is igaz.

A g_{i+1} pedig nem más, mint f_i-re egy d-sugarú minimumképzést alkalmazva kapott függvény, tehát definíció szerint $g_{i+1}(h)$ értéke az f_i függvény $[h-d, h+d]$ tartományon felvett legkisebb értéke. Ezt úgy képzelhetjük el, hogy a $g_{i+1}(h)$ értékek meghatározásához egy d-sugarú, középpontjával az aktuális h-ra illesztett ablakot csúsztatunk végig f_i grafikonján, úgy, hogy az ablak függőleges irányban úgy mozog, hogy mindig f_i grafikonján „lógjon”, tehát függőleges pozíciója f_i legkisebb értékének feleljen meg az általa kijelölt a $2d$ széles tartományban. Ekkor a végigcsúsztatás során az ablak középpontja épp g_{i+1} grafikonját rajzolja meg (lásd az 1. ábrát).

Esetünkben ez azt jelenti, hogy g_{i+1} értelmezési tartománya nem más, mint f_i-jé, mindkét oldalán d szélességben megtoldva. Az f_i függvény bal oldali szig. monoton csökkenő tartományán a minimum mindig az ablak jobb szélén fog adódni, így az előző analógiát folytatva az ablak közepe pont f_i-t fogja megrajzolni, csak éppen d-vel balra eltolva. A szig. monoton növekvő részen pedig f_i d-vel jobbra eltoltja fog megjelenni. Középen pedig, amennyiben „csúcsos” volt az eredeti függvény, $2d$ távolságon az ablak a függvény minimumpontját pásztázza, az új függvényben egy $2d$ hosszú lapos (vízszintes) szakasz jelenik meg, ha pedig az eredeti függvény alja is lapos volt, annak hossza $2d$-vel megnő. Összességében tehát elmondhatjuk, hogy a minimumképzés mindkét irányba d-vel *széthúzta* a függvény két ágát, a középen keletkező $2d$ széles új részt pedig a minimumérték megnyújtásával hozta létre.

Így már világos, hogy a g_{i+1} függvényre, így f_{i+1}-re is teljesül a tétel állítása.

□



1. ábra. Az f_{i+1} függvény meghatározásának menete $d = 2$ maximális ugrás és $h_{i+1} = 11$ eredeti oszlopmagasság esetén.

Algoritmus

A függvényeket a vég- és töréspontok koordinátáival leírva hatékonyan elvégezhető a minimumképzés, illetve az összeadás művelete is. Előbbihez egyszerűen a csökkenő részhez tartozó pontok

x-koordinátáját d-vel csökkentjük, a növekedő résznél pedig növeljük. Alul „csúcsos” eredeti függvény esetén szükség van a csúcs szétbontására, ezt egy új pont beszúrásával tehetjük meg.

Az abszolútérték-függvény hozzáadásakor pedig egyszeráűen függőlegesen felfelé toljuk a pontokat x-koordinátájuk a h_{i+1}-től vett távolságával, illetve az abszolútérték-függvény minimumánál szükség esetén (ha nem volt ott korábban) beszúrunk egy új pontot.

A megoldást az f_n függvény h_n helyen felvett értéke adja, vagy ha nem értelmezett, akkor nincs megoldás.

Komplexitásvizsgálat

Az f_1 függvény egyetlen pontból áll, és minden újabb f_{i+1} legfeljebb 2 új pontot tartalmazhat f_i pontjain túl, így f_n pontszáma legfeljebb $2n-1$. Mivel mind a minimumképzés, mind az összeadás lépésszáma a pontok számával (ami az előbbiek miatt $O(n)$-nel becsülhető) arányos, és ezekből $O(n)$ darabot végzünk el, az algoritmus teljes lépésszáma $O(n^2)$.